

数学应用题图式层次性研究

郭兆明¹, 宋宝和², 张庆林³

(1. 扬州大学 数学科学学院, 江苏 扬州 225002; 2. 聊城大学, 山东 聊城 252059; 3. 西南大学 心理学院, 重庆 400715)

摘要: 数学应用题图式具有层次性, 这种层次性主要集中在思维图式范围内, 而且随着层次的递进, 图式抽象度越来越高; 数学应用题的图式层次性与徐利治先生提出的抽象度理论具有高度一致性. 利用图式的层次性可以使数学应用题课程设计更趋于科学化.

关键词: 数学应用题; 图式; 层次性; 抽象

中图分类号: G424.1 **文献标识码:** A **文章编号:** 1004-9894 (2006) 03-0027-04

数学应用题图式是学生在数学应用题的学习过程中, 对现实世界中的事件和关系概括的基础上形成的, 以数学知识和逻辑知识形式存在的、存储在长时记忆中的、具有一定框架结构的陈述性知识. 数学应用题图式在长时记忆中是如何存储的? 心理学家进行了深入的研究. 本文首先对数学应用题图式层次性研究从算术应用题图式的层次性研究和代数应用题图式的层次性研究两个方面进行综述, 然后, 再作简要的总结.

1 算术应用题图式的层次性研究

数学应用题, 在国外被称为数学文字题 (mathematical word problems), 是以现实世界中的事件与关系为题材, 用自然语言叙述, 以执行数学运算为主的问题. 如果应用题只执行加减运算, 就称为加减应用题; 如果应用题只执行加、减、乘、除运算, 就称为算术应用题; 一个被广泛接受的加减应用题分类是根据问题的语义结构 (semantic structure) 将问题分为 3 种类型: 合并题 (combine problems)、变化题 (change problems) 和比较题 (compare problems).

徐敏毅^[1-2]认为, 在大量日常生活经验的基础上, 儿童发展出相应的认知加工图式. 比如, “变化图式” “比较图式” 和 “合并图式” 等. 然后, 在正规的数学教育影响下, 儿童将这一系列非正规的图式整合成正规的“部总关系推理图式”. 变化图式、比较图式和合并图式可以被看作是部总关系推理图式的低级图式. 部总关系推理图式是儿童在解决简单算术应用题时最终形成的高级图式. 当儿童形成部总关系推理图式后, 儿童就能够根据问题的量之间的本质关系: 部总关系 “部分₁ + 部分₂ = 总体” 进行加工. 因此, 可以摆脱问题表面结构的影响, 从而对问题进行更加有效、准确的加工. 这时, 儿童的加工方式是自上而下受概念驱动的, 解决问题的过程, 从一开始就受部总关系图式的引导, 把所有的简单加减应用题分为两类: 求总数和求部分数.

刘广珠^[3]认为, 比较图式水平依照动作、表象、思维顺序发展. 动作图式是在事物操作过程中依靠动作表征数量关

系, 理解题意, 获取答案, 它是低水平的. 表象图式是动作图式内化的结果, 表面看来没有任何动作操作. 实际上, 儿童是通过实物的表象操作解决问题. 思维图式是利用符号进行解题, 儿童脱离了实物的具体形象, 出现了抽象思维. 动作图式、表象图式和思维图式具有层次性关系.

辛自强^[4]以小学三、四年级 60 名儿童为被试, 采用对基本算术应用题分类的方法测量图式. 结果表明, 被试对问题的分类有前图式水平和图式水平、按解题程序分类 3 种情况, 前图式水平又分为 3 个水平, 图式水平又分为 2 个水平 (如表 1).

表 1 算术应用题分类水平与标准

	分类水平	分类表征与方法
前图式水平	水平 0	不会分类. 如不会概括分类标准, 或一题一类等.
	水平 1	根据数量指称的事物, 如弹球, 邮票等分类.
	水平 2	根据题目中与数量有关的字眼, 如给、多等分类.
图式水平	水平 3	根据对数量关系的初步概括或反映数量关系的线索词比较准确地分类.
	水平 4	根据对集合关系的本质概括作基本正确地分类.
程序分类	水平 5	按照解题运算方法或程序分类, 分成加法题或减法题.

Low 等^[5]研究了“有关矩形面积问题图式的层次性”. 研究表明, 对不同个体, 掌握模板 (templates) 的相对次序是不变的; 当学生缺少高层次的模板知识时, 他们将尝试应用低层次的模板. 由低到高的 4 块模板为: (1) 面积可以通过相邻两边计算得到; (2) 一边和另一边与此边的关系; (3) 一边和周长; (4) 一边和对角线.

辛自强^[6]对 Low 的实验材料进行了修改, 实验结果支持了 Low 的结论: 矩形面积问题图式具有层次性. 具有层次性的由低到高的 4 块模板为: (1) 两条邻边已知; (2) 一边以及它与邻边的关系 (倍数或和差关系); (3) 周长与一边; (3) 周长以及邻边的关系 (倍数或和差关系).

收稿日期: 2006-04-11

作者简介: 郭兆明 (1966—), 男, 江苏扬州人, 西南大学博士生, 主要从事数学学习心理研究.

辛自强^[7]以问题“为迎接‘五一’劳动节，红星电视机厂的甲、乙两个车间进行 3 天的生产劳动比赛，甲车间第一天生产电视机 15 台，第二天生产 17 台，第三天生产 21 台，乙车间前两天共生产 32 台，请问乙车间第三天最少要生产多少台才能超过甲车间？”为例，研究解决算术应用题中图式与策略的关系。研究发现，学生解决此应用题时有 3 个水平的图式：初级图式、二级图式和三级图式。部分—整体关系图式（初级图式）为：甲车间生产的电视机的总台数 = 甲车间第一天生产的电视机的台数 + 甲车间第二天生产的电视机的台数 + 甲车间第三天生产的电视机的台数，乙车间生产的电视机的总台数 = 乙车间前两天生产的台数 + 乙车间第三天生产的电视机的台数。比较关系图式（二级图式）为：乙车间生产的电视机总台数 = 甲车间生产的电视机总台数 + 1。对应等同关系图式（三级图式）为：乙车间第三天生产的电视机台数 = 甲车间第三天生产的电视机台数 + 1。只具有初级图式的学生不能正确解题；具有二级图式的学生只能使用常规策略解题，常规策略为： $15 + 17 + 21 = 53$ ， $53 + 1 = 54$ ， $54 - 32 = 22$ 。具有三级图式的学生才能使用快捷策略解题。快捷策略为： $21 + 1 = 22$ 。

2 代数应用题图式的层次性研究

Mayer^[8]对 9 个代数课本中 1 097 个代数应用题进行分类。基于使用的基本公式，这些问题被分成 8 个家族 (families)；基于问题的概括形式，每个家族被分成许多问题类别 (categories)。例如，“数量—时间比率”家族 (amount-per-time families) 包括“运动” (motion)、“水流” (current) 和“工程” (work) 类别。基于问题的具体命题结构，每个类别又被分成模板，例如，运动类别被分成 12 个模板，诸如，追击问题 (overtake)，相遇问题 (closure) 往返问题 (round trip) 等。模板、类别和家族构成由低级到高级的代数应用题图式。

张庆林^[9]认为，有些代数应用题可以分别使用数量关系公式“工作效率 × 工作时间 = 工作总量”“速度 × 时间 = 路程”“单价 × 数量 = 总价”来解决。譬如，(1) 完成一件工作，师傅单独去做需要 20 天才能完成，徒弟则需要 30 天，现在师徒两人一起去做，需要多少天才能完成？(2) 向一个水池里放水，用甲龙头放需要 20 分钟才能放满，用乙龙头放则需要 30 分钟，现在两个龙头一起放，需要多少分钟才能放满？(3) 客车从甲地到乙地需要 20 小时，货车从乙地到甲地需要 30 小时，现在两车分别从甲乙两地同时相向开出，多少小时两车相遇？(4) 妈妈上街买布，用她所带的钱买第一种布可以买 2 米，买第二种布则可买 3 米，妈妈决定两种布买一样多，她所带的钱两种布各买几米？但如果学生能够把这 3 个数量关系式归纳为一个更概括的数量关系公式“单位量 × 单位数 = 总量”，解题能力便得到提高。这

里的“速度 × 时间 = 路程”“工作效率 × 工作时间 = 工作总量”“单价 × 数量 = 总价”相当于初级认知图式，“单位量 × 单位数 = 总量”相当于由 3 个初级认知图式归纳得到的高级认知图式。Owen^[10]认为，学生必须获得大量的初级认知图式，然后，在这些图式的基础上再形成高级认知的图式；在学生的长时记忆中，初级认知图式虽很多，但高级认知图式却很少。

在 Hinsley 等^[11]的研究中，被试是根据问题的表面内容的相似性对问题进行分类，他们甚至只听到问题的几个词就能分类，例如距离问题、利息问题、面积问题等。但是随着专长的增加，人们能根据解题程序的相似性而不是故事内容的相似性对问题分类。这暗示图式可能是按照等级方式组织起来的，随着专长的增加，图式的概括性也增强。

Reed^[12]以问题“一个护士把 6% 的硼酸溶液与 12% 的硼酸溶液混合起来，要得到 8% 的硼酸溶液 4.5 品脱，需要两种硼酸溶液各多少品脱？”(简称“护士问题”)为例，来阐述表征代数应用题的 3 个水平知识。层次表征表现在图 1 的命题网络中。图 1 的最上层表征显示规则：酸的总量相等；中间水平表征用于解决问题的方程框架；最低水平表征用具体的数量表示方程。规则水平—框架水平—数量水平，抽象水平逐渐降低。中间水平和规则水平表征为两个不同层次水平的图式。

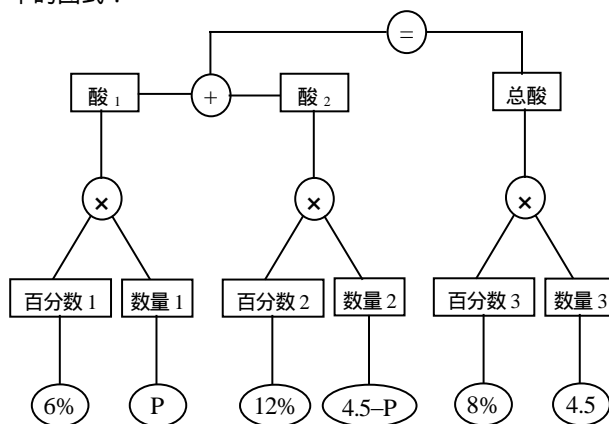


图 1 “护士问题”的层次表征

“护士问题”的 3 层次表征为：酸₁ + 酸₂ = 总酸， $P_1A_1 + P_2A_2 = P_3A_3$ ， $0.06a + 0.12 \times (4.5 - a) = 0.08 \times 4.5$ 。问题“Smith 用利息 5% 的活期存款和利息 14% 的基金存款，每种方式存多少美元才能得到 4 500 美元平均利息 12%？”(简称“利息问题”)的 3 个层次表征为：钱₁ + 钱₂ = 总钱， $P_1A_1 + P_2A_2 = P_3A_3$ ， $0.05a + 0.14 \times (4\ 500 - a) = 0.12 \times 4\ 500$ 。问题“一种合金是 20% 的纯铜另一种合金是 12%，需每种合金多少才能获得 60 磅合金包含 10.4 的纯铜”(简称“合金问题”)的 3 个层次表征为：铜₁ + 铜₂ = 总铜， $P_1A_1 + P_2A_2 = P_3A_3$ ， $0.2a + 0.12 \times (60 - a) = 10.4$ 。“护士问题”和“利息问题”的各水平的图式都相同。而“护士问题”和“合金问题”在规则

水平上相同，而在中间水平上不同。

3 总 结

徐敏毅^[1-2]所讨论的合并图式和变化图式都是非正规的图式，都是根据题目的语义关系分类的。因此，这些图式与文[7]中的前图式水平相当。刘广珠^[3]认为儿童的比较图式依照动作图式、表象图式和思维图式的顺序发展。动作图式与表象图式也相当于前图式水平。我们讨论的数学图式的层次性主要集中在思维图式的范围内。

Low^[5]及辛自强^[6]的4个模板的层次性反映了数学应用题图式的层次性。文[5~7]中所提的图式层次性属于同一种类型抽象。这种图式抽象是一种广义抽象，即如果在定义图式B时用到了图式A，则称图式B是图式A的广义抽象，即图式B比图式A抽象。例如，文[7]把只关于甲车间（或乙车间）生产电视机的数量关系式称为一级图式，把涉及甲乙两者关系的数量关系式称为二级图式。在定义二级图式时，用到了一级图式。因此，二级图式比一级图式抽象。在二级图式的基础上，由于“甲、乙车间前两天的生产电视机的总台数相等”这个数量事实，由二级图式和数量事实得到的一个数量关系式称为三级图式，定义三级图式时用到了二级图式。因此，三级图式比二级图式抽象。同样的理论框架可以总结文[5~6]的图式层次性。

然而，Mayer^[8]、张庆林^[9]以及Reed^[12]定义的图式层次性采用了另外的思路。但这3个研究的图式层次性定义是一致的，图式层次性属于同一种类型抽象——弱抽象，即从图式中选取某一特征加以抽象，从而获得比原图式更广的图式，使原图式成为后者的特例。Reed^[12]的研究提供了一个很好的范例。图式“ $P_1A_1 + P_2A_2 = P_3A_3$ ”是从方程 $0.06a + 0.12 \times (4.5 - a) = 0.08 \times 4.5$ 抽象而来，把具体的溶液的浓度和溶液的质量抽象为字母。同样，图式“酸₁ + 酸₂ = 总酸”是从图式“ $P_1A_1 + P_2A_2 = P_3A_3$ ”再抽象而来。高级认知图式比初级认知图式更抽象。这两种图式层次性框架与徐利治先生的抽象度思想一致^[13]。

我们认为，用数学应用题类型知识来解题是初学者的解题策略，对于掌握数学知识是必须的，数学应用题类型知识相当于前图式水平。但学生向“专家”成长的过程中，一定要逐步形成更抽象的图式（从前图式水平到初级认知图式再到高级认知图式）。当然，图式抽象水平应该符合学生的思维发展水平。一方面，教学生图式抽象时，不能局限于学生

当前的思维水平，要积极推动学生的抽象思维水平的发展；另一方面也不能单凭教师的主观愿望一味强调图式抽象，当超出学生的接受能力时，总结出来的高级认知图式只是变成了学生记忆的负担，很难被学生灵活地用到解题活动中。

数学应用题是学生学习的重点和难点，数学应用题图式层次性的研究，对数学教学的设计具有重要的意义。图式的层次性实质上刻画了数学应用题的抽象梯度。因此，数学应用题层次性的研究，有利于数学课程的设计。利用图式的层次性可以使数学应用题课程设计更趋于科学化。第一，对于传统数学应用题（规则应用题），应按照相同问题（equivalent problems）、同型问题（isomorphic problems）和相似问题（similar problems）的顺序安排课程。相同问题是指具有相同的情节和相同的解题步骤；相似问题是指具有相同的情节和不同的解题步骤；而同型问题是指具有不同的情节和相同的解题步骤^[12]。因为，相同问题都拥有相同层次的认知图式，而且情境相同，所以最容易迁移，对于初学者最适宜；而同型问题也具有相同层次的认知图式，但情境不相似，所以迁移就有一定的难度；相似问题虽然情境相同，但解题步骤不同，即使在同一类别中的相似问题，初级认知图式也不相同，但高级认知图式相同。例如，Reed^[12]中的“护士问题”和“合金问题”在低级图式（中间水平）上不同，而在高级认知图式（规则水平）上相同。因此，最后安排相似问题。第二，先呈现规则应用题，再呈现具有相同层次图式的不规则应用题。不规则应用题是那些与现实生活更为接近的题目，这些题可能有解，可能无解；题目中的条件有可能是充分的，可能是缺失的；有些条件可能是必要的，可能是不必要的。总之，学生要利用自己的日常生活经验，并结合数学思维推理解决问题^[14]。由于不规则应用题要利用日常生活经验，因此，比具有相同层次图式的传统应用题难度更大。

一直以来，数学应用题课程如何被组织主要由常识和传统决定。我们认为，数学应用题教学设计一定要有理论指导，此理论一定要把建构主义理念和认知心理学研究结合起来，因为建构主义只是一种宏观的、描述性的理念，它只是粗略地反映人类的认知活动，而不能对某一特殊的内容作细微的说明。因此，有必要结合认知加工范式对知识的建构进行更为详细的研究，而非止于思辨。数学应用题图式的层次性研究就是一个很好的范例。

[参 考 文 献]

- [1] 徐敏毅. 儿童解决算术应用题认知加工过程的实验研究[J]. 心理发展与教育, 1994, (2): 33-39.
- [2] 徐敏毅. 4-8岁儿童解决算术应用题认知加工过程的实验研究(II)[J]. 心理发展与教育, 1995, (4): 16-21.
- [3] 刘广珠. 儿童解决算术应用题认知加工过程及比较图式形成的实验研究[J]. 心理发展与教育, 1996, (2): 1-5.
- [4] 辛自强. 问题解决与知识建构[M]. 北京: 教育科学出版社, 2005.

- [5] Low R, Over R. Hierarchical Ordering of Schematic Knowledge Relating to Area-of-rectangle problems [J]. *Journal of Educational Psychology*, 1992, 84(1): 62–69.
- [6] 辛自强. 问题解决中图式的建构: 一项应用题分类研究[J]. *心理发展与教育*, 2005, (1): 69–73.
- [7] 辛自强. 关系—表征复杂性模型的检验[J]. *心理学报*, 2003, 35(4): 504–513.
- [8] Mayer R E. Frequency Norms and Structural Analysis of Algebra Story Problems into Families, Categories, and templates [J]. *Instructional Science*, 1981, (10): 135–175.
- [9] 张庆林, 杨东. 高效率教学[M]. 北京: 人民教育出版社, 2002.
- [10] Owen E, Sweller J. What do Students Learn while Solving Mathematics Problems? [J]. *Journal of Educational Psychology*, 1985, 77(3): 272–284.
- [11] Hinsley D A, Hayes J R, Simon H A. From Words to Equations: Meaning and Representation in Algebra Word Problems [A]. In: Carpenter P A, Just M A. *Cognitive Processes in Comprehension* [C]. Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, 1977.
- [12] Reed S K. A Structure-mapping Model for Word Problems [J]. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, Cognition*, 1987, 113(1):124–139.
- [13] 徐利治, 张鸿庆. 数学抽象度概念与抽象度分析法[J]. *数学研究与评论*, 1985, (5): 135–140.
- [14] Gavemeijer K. Commentary Solving Word Problems: a Case of Modeling [J]. *Learning and Instruction*, 1997, 7(4): 389–397.

Research on Hierarchy of Mathematical Word Problems Schema

GUO Zhao-ming¹, SONG Bao-he², ZHANG Qing-lin³

(1. School of Mathematics Science, Yangzhou University, Jiangsu Yangzhou 225002, China;

2. School of Educational Science, Liaocheng University, Shandong Liaocheng 252059, China;

3. School of Psychology, Southwest University, Chongqing 400715, China)

Abstract: Research on hierarchy of arithmetic word problems and algebraic word problems showed: mathematical word problems have hierarchy. The hierarchy mainly focus on thinking schema. Along with increase on hierarchy of schema, abstract degree advance. Hierarchy of mathematical word problems schema accord with Mr. XU Li-zhi' idea of abstract degree. Research on hierarchy of mathematical word problems were in favor of the design of mathematical curriculum.

Key words: mathematical word problems; schema; hierarchy; abstract

[责任编辑: 陈汉君]